

# EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA DE PROFESORES COLOMBIANOS ACTIVOS

**Walter F. Castro, Luis R. Pino-Fan, Vicenç Font**

Universidad de Antioquia (Colombia)

Universidad de Los Lagos (Chile)

Universitat de Barcelona (España)

wfcastro82@gmail.com, luis.pino@ulagos.cl, vfont@ub.edu

**Palabras clave:** derivada, profesores, conocimiento del contenido

**Key words:** derivative, teachers, content knowledge

## RESUMEN

El estudio de los conocimientos del profesorado de matemáticas, es un tema de creciente interés. En esta investigación nos hemos interesado en caracterizar aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores colombianos activos mediante una prueba que consta de 22 que explora diversos significados de la derivada. La investigación pretende responder a dos preguntas: ¿Cuál es el conocimiento del contenido que los profesores en activo tienen sobre la derivada?, ¿Cuál es el conocimiento para la enseñanza de la derivada que los profesores exhiben? Los resultados parciales obtenidos permiten señalar que los profesores tienen un conocimiento del contenido robusto sobre la derivada, y además, exhiben competencia para identificar conflictos de significado y para reconocer el conocimiento válido detrás de respuestas “erróneas” por parte de sus alumnos.

## ABSTRACT

The study on the knowledge of secondary mathematics teachers for them to teach is an interesting topic. This research intends to characterize relevant aspects of the mathematical knowledge to teach the derivative that in-service Colombian teachers exhibit. We have use a test made of 22 items that explore different derivative meanings. We are interested in exploring two questions: Which is the content knowledge about the derivative, of in-service Colombian teachers?, and What is the mathematical knowledge to teach the derivative that in-service Colombian teachers exhibit? The partial conclusions of the study let us to state that in-service teachers have a sound content knowledge to teach the derivative. Their mathematical knowledge for teaching allows them to recognize meaning conflicts and to negotiate meanings with their students.

## ■ Introducción

El estudio sobre el conocimiento matemático para la enseñanza de profesores es un tema que interesa a la comunidad de investigadores en educación matemática. Algunas investigaciones proponen modelos para estudiar el conocimiento requerido para enseñar de manera idónea las matemáticas (Shulman, 1986; Ball, Thames y Phelps, 2008, entre otros). El estudio sobre el conocimiento que los profesores exhiben sobre un tema matemático concreto, en nuestro caso la derivada, es importante en tanto que el desempeño matemático de los alumnos de una institución, depende de manera esencial de la formación de sus respectivos profesores (Hill, Ball y Schilling, 2008). En esta investigación nos hemos interesado por responder dos preguntas: ¿Cuál es el conocimiento del contenido que los profesores en activo tienen sobre la derivada?, ¿Cuál es el conocimiento para la enseñanza de la derivada que los profesores exhiben?

## ■ Contexto

Los datos reportados en este documento se tomaron con once profesores-en servicio- de matemáticas, inscritos en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Dichos profesores enseñan en los niveles de secundaria y bachillerato en diversas instituciones educativas en Bogotá, Colombia. La edad promedio de los profesores es de 28 años.

## ■ Marco teórico y metodología

En esta investigación se ha adoptado el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) de los profesores planteado inicialmente por Godino (2009) y refinado en diversas investigaciones (Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2013). El cuestionario fue diseñado con base en dicho modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático. El modelo CDM propone medios para categorizar y analizar los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor mediante la aplicación de las herramientas teórico-metodológicas que proporciona el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). En tanto que interesa caracterizar aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores colombianos activos, se diseñó una prueba que consta de 22 cuestiones, que se distribuyeron en dos pruebas equiparables para facilitar su aplicación. Las cuestiones se dividen en tres grupos: en el primer grupo se incluyen tres preguntas abiertas que indagan sobre creencias que los profesores tienen sobre la derivada; en el segundo grupo se incluyen cinco preguntas que indagan sobre el conocimiento del contenido de la derivada, mientras que las preguntas del último grupo indagan sobre el conocimiento para la enseñanza, específicamente exploran el tratamiento que los profesores dan a respuestas erróneas de posibles estudiantes de bachillerato. Las preguntas del segundo grupo indagan sobre el conocimiento del contenido sobre la derivada. Las preguntas responden a los diferentes tipos de representaciones activadas en los tres subprocesos, que según Font (1999), intervienen en el cálculo de la función derivada: 1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar  $f(x)$ ; 2) El paso de una representación de  $f(x)$  a una forma de representación de  $f'(x)$ ; y 3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar  $f'(x)$ . Las preguntas incluidas en este grupo ponen en juego los diferentes tipos de representaciones que intervienen en estos tres subprocesos: descripción verbal, gráfica, fórmula (simbólico) y tabular; tanto para la función como para su derivada. Las cinco preguntas que indagan sobre el conocimiento del contenido –cinco para cada versión del examen– se diseñaron en el marco de una tesis doctoral (Pino-

Fan, 2014) mientras que las restantes preguntas se diseñaron posteriormente en el marco de la investigación que se reporta aquí. En ambos casos se sometieron a juicio de dos grupos diferentes de expertos. Para el segundo grupo de preguntas, se efectuó una prueba piloto que permitió ajustar las preguntas. Para cada una de las cuestiones propuestas se efectuó tanto un análisis epistémico, así como un análisis cognitivo de las respuestas dadas por los profesores. El análisis facilita estudiar las soluciones dadas por los profesores activos a las que se les hizo un análisis cognitivo. En lo que sigue se informa sucintamente sobre algunos hallazgos para cada grupo de preguntas.

### ■ Creencias sobre la derivada

Las tres preguntas indagan sobre las creencias que los profesores tienen sobre la derivada. Los enunciados de las tres preguntas son:

1. ¿Qué significado tiene para ti la derivada?
2. ¿Qué es la derivada de una función?
3. ¿Crees que la derivada puede enseñarse en la escuela primaria? Si consideras que sí es posible, indica cómo se podría hacer.

El objetivo de la primera pregunta es explorar los significados preferenciados por los profesores cuando se refieren a la derivada (Pino-Fan, 2014). La segunda pregunta indaga por los significados vinculados con la derivada y la función. La tercera pregunta puede parecer un poco fuera de lugar, en tanto que la derivada aparece, en el currículo matemático escolar, en el grado once. Sin embargo tiene sentido en el caso colombiano, en tanto que los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2003) se dividen en cinco tipos de ‘Pensamientos Matemáticos’, uno de ellos, el Pensamiento Variacional, propone que el cambio y la variación sean motivo de estudio desde los primeros grados de la escolaridad. La pregunta indaga por los eventuales vínculos que los profesores realizan entre el cambio, la variación y la derivada en el currículo matemático escolar colombiano. La Tabla 1 muestra algunas de las respuestas que los profesores dieron a la pregunta uno.

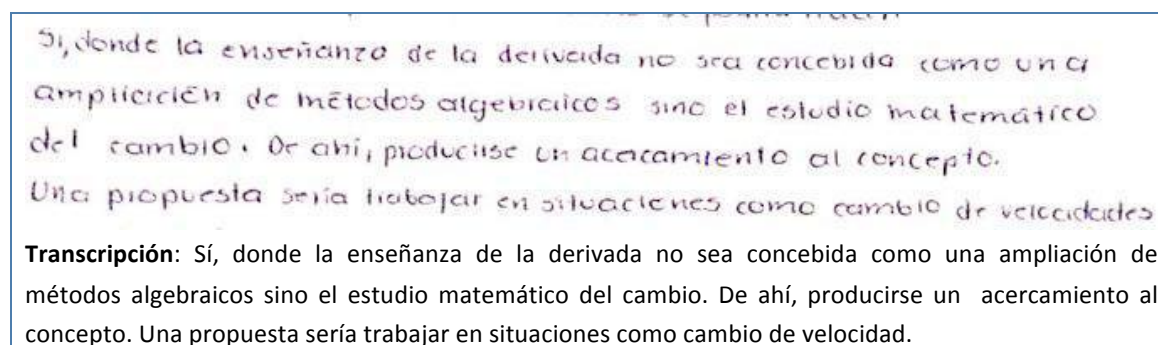
**Tabla 1. Significados para la derivada**

Profesor	Algunos significados atribuidos a la derivada
1	Es un objeto matemático que permite caracterizar a una función primitiva y observar su comportamiento, también se puede ver como una razón de cambio entre dos magnitudes.
2	La derivada es una razón de cambio del comportamiento de dos magnitudes en un instante.
3	La derivada es una razón de cambio de una variable con respecto a otra en un instante (razón como la velocidad, como la aceleración).
4	La derivada es la razón de cambio de una magnitud con respecto a otra magnitud, se usa para saber si la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto; también representa la velocidad pues muestra el cambio de la distancia con respecto al tiempo.
5	Las derivadas son una clase de funciones que se obtienen a partir de una función inicial las cuales tienen aplicaciones en situaciones en las que interviene la función inicial.
6	La derivada es la razón de cambio de una magnitud con respecto a otra.
7	Representa la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto dado.
8	...la forma de determinar la variación en un punto o puntos determinados, es una herramienta que

	es utilizada para estudiar las funciones. De manera gráfica tiene un significado que asocio con rectas secantes que en un punto dado se convierte en una recta tangente, en general, la derivada permite caracterizar y estudiar la razón de cambio.
9	Razón de cambio.
10	Es una herramienta para comparar la razón entre dos incrementos.
11	Concepto matemático que se presentó con el problema geométrico de determinar la tangente en un punto en una curva...

Se aprecia que los profesores activos, en conjunto, manifiestan conocer los significados usuales para la derivada, que se vinculan con: derivada como razón de cambio, pendiente de la recta tangente, la forma de determinar la variación en un punto. La segunda pregunta no se comenta en este documento. La Figura 1 exhibe una de las respuestas a la tercera pregunta.

**Figura 1: Respuesta de un profesor sobre la derivada en la escuela primaria**



La respuesta del profesor permite inferir que relaciona la derivada con “razón de cambio” y recurre a una situación cotidiana “velocidad” para ilustrar el cambio en términos de una razón. Para Zandieh (2000) los tres procesos -razón, límite y función- caracterizan el estudio de la derivada. Para este profesor, de los tres procesos, sólo el de razón podría ser usado para discutir fenómenos de cambio en la primaria. Del conjunto de once profesores, 8 de ellos (72%) dio respuestas en la que se resaltaba la derivada como instrumento para medir el cambio, en directa relación con la propuesta del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, de vincular “cambio y variación”. Los profesores coincidieron que para estudiar la derivada se requiere un proceso de acercamiento asintótico con lo cual tan sólo es posible referirse a ella en situaciones de cambio promedio y no de cambio instantáneo en la escuela primaria.

### ■ El conocimiento del contenido

Por limitaciones de espacio tan solo se comentarán los resultados generales de las cinco preguntas que abordan el conocimiento del contenido para la enseñanza de la derivada, lo que en términos del modelo CDM refiere a la dimensión matemática (Pino-Fan y Godino, 2014). El cuestionario para valorar el conocimiento matemático del contenido contempla cinco cuestiones que incluyeron ítems que requieren el uso de distintos sentidos para el objeto derivada (pendiente de la recta tangente, razón instantánea de cambio y tasa instantánea de variación), en tanto que el conocimiento del contenido es

un aspecto muy importante para la enseñanza (Hill et al., 2008). Los ítems fueron asignados a dos pruebas: prueba uno y prueba dos, que son equiparables. En la Tabla 2 se enumeran los ítems según el número de prueba y se muestran los resultados de las soluciones que los estudiantes dieron a las cuestiones. Se han usado las categorías: correcta, parcialmente correcta e incorrecta.

**Tabla 2: Resultados sobre el conocimiento matemático**

Número de la pregunta	Ítems		Correcta		Parcialmente Incorrecta		Incorrecta	
	Prueba I	Prueba II	Prueba I	Prueba II	Prueba I	Prueba II		
<b>4</b>	I-4-a	II-4-a	x	x				
	I-4-b	II-4-b	x	x				
	I-4-c	II-4-c	x	x				
	I-4-d	II-4-d	x	x				
	I-4-e	II-4-e	x	x				
<b>5</b>	I-5-a	II-5-a	x	x				
	I-5-b	II-5-b	x	x				
		II-5-c		x				
<b>6</b>	I-6-a	II-6-a	x	x				
	I-6-b	II-6-b	x	x				
		II-6-c		x				
		II-6-d		x				
		II-6-e		x				
<b>7</b>	I-7	II-7-a			x	x		
		II-7-b		x				
<b>8</b>	I-8	II-8	x	x				

Se evidencia de los datos de la Tabla 2 que los profesores activos tienen un conocimiento amplio sobre la derivada.

### ■ El conocimiento para la enseñanza

En este apartado se discuten dos cuestiones que indagan sobre el conocimiento para la enseñanza de la derivada que exhiben los profesores. La primera cuestión refiere a la valoración que los profesores hacen de respuestas de supuestos estudiantes y la comprensión que demuestran sobre los conflictos de significado. La Figura 2 muestra una de las tareas planteadas a los profesores en ejercicio.

Figura 2: Derivadas sucesivas de la función exponencial

Un profesor dio este problema a sus estudiantes:

Calcular las tres primeras derivadas de la siguiente función:  $f(x) = e^{(x+x^2)}$

Las respuestas que varios estudiantes dieron fueron estas:

$$f'(x) = e^{(x+x^2)}$$

$$f''(x) = e^{(x+x^2)}; \text{ es la misma}$$

$$f'''(x) = e^{(x+x^2)}; \text{ es la misma}$$

Interrogados por sus respuestas afirmaron: *Bien, la derivada de la función exponencial es ella misma...*

¿Qué explicación daría Usted a los estudiantes?

Todos los profesores coinciden en afirmar que los estudiantes tienen un conflicto con la expresión “la derivada de la función exponencial es ella misma”. La Figura 3 muestra la respuesta de uno de los profesores.

Figura 3: Respuesta de uno de los profesores

La explicación que daría a los estudiantes es que ellos tienen la razón en su afirmación de que la derivada de una función exponencial es ella misma. Sin embargo hay que tener en cuenta que el término “central” de la función exponencial o el exponente en este caso no es la variable independiente sino otra función de esta. Por lo cual es pertinente aplicar la regla de la cadena.

**Transcripción:** La explicación que daría a los estudiantes es que ellos tienen la razón en su afirmación de que la derivada de una función exponencial es ella misma. Sin embargo hay que tener en cuenta que el término “central” de la función exponencial o el exponente en este caso no es la variable independiente sino otra función de esta. Por lo cual es pertinente aplicar la regla de la cadena.

Los profesores coinciden en reconocer la importancia del uso de la regla de la cadena, y ninguno de ellos afirmó que los estudiantes manifestaran un error. Los once profesores muestran competencia en el conocimiento para la enseñanza de la derivada. No solamente pueden responder correctamente a la pregunta sino que reconocen conflictos de significado asociados al conocimiento matemático disciplinar. El profesor parece comprender la ambigüedad presente en la expresión verbal de reglas matemáticas. Voigt (1994, p. 178) afirma que la comprensión de la negociación de los significados como “el logro de la intersubjetividad de los significados no implica que el profesor y los estudiantes «comparten el conocimiento»”. Características distintivas del conocimiento referente a la faceta epistémica del CDM que Pino-Fan y Godino (2014) plantean son: el uso de distintas representaciones, uso de distintos significados de la derivada, resolución del problema mediante diversos procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas para explicar dichos procedimientos.

### ■ Conclusiones

La contribución de este trabajo es doble, por un lado, se brinda información del conocimiento matemático sobre la derivada, que profesores activos exhiben cuando se enfrentan a problemas en los que se exploran significados diversos de la derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Por otro lado, se ofrece información sobre el conocimiento de los profesores activos, cuando valoran soluciones –de estudiantes hipotéticos– de tareas que involucran el concepto de la derivada. Las conclusiones obtenidas del estudio, en correspondencia con las preguntas formuladas, se agrupan en tres: 1) Los profesores vinculan la derivada con el estudio de la variación y el cambio; un número mayoritario considera, por ejemplo, que la “derivada” se puede enseñar en la escuela primaria y ofrecen argumentos plausibles para respaldar sus afirmaciones; 2) Se aprecia que los profesores tienen un conocimiento disciplinar amplio sobre la derivada; y 3) se evidencia que los profesores logran identificar algunos de los conflictos de significado de los estudiantes hipotéticos que orientan las soluciones. Igualmente amplían o justifican algunos de tales conflictos o errores.

### ■ Referencias bibliográficas

- Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Font, V. (1999). Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada [Procedures for obtaining symbolic expressions from graphs: Applications in relation to the derivative]. Doctoral thesis: University of Barcelona.
- Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas [Categories for analysing the knowledge of mathematics teachers]. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Godino, J. D., & Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3325 – 3326). Antalya, Turkey: CERME.
- Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.



- Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEC) (2003). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, D C: Autor.
- Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada.
- Pino-Fan, L., Font, V. & Godino, J. D. (2013). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137 – 151). México, D. F.: Ediciones D. D. S. & Universidad Autónoma de Guerrero.
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2014). Perspectiva ampliada del conocimiento-didáctico matemático del profesor. Manuscrito enviado para su publicación. Disponible en: <https://db.tt/VliqGqR7>
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (1ª Parte). *REVEMAT*, 8(2), 1 – 49.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 26(2-3): 275-298.
- Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En Dubinsky, E., Schoenfeld, A. J. & Kaput, J. (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (Vol. 8, pp. 103-127). Providence, USA: American Mathematical Society